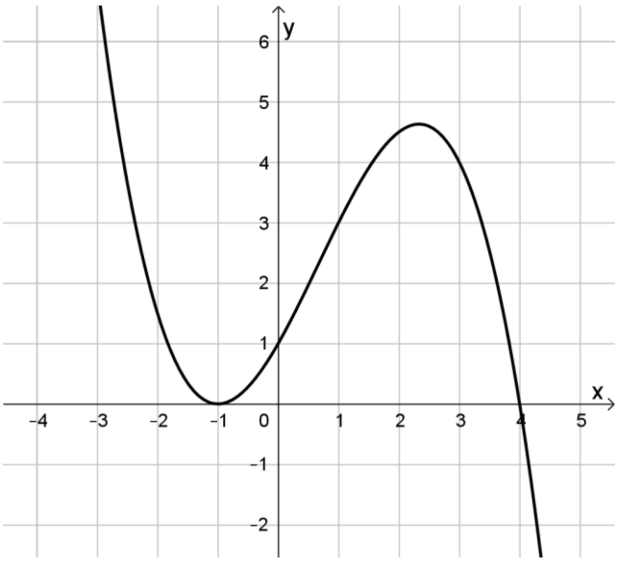
Ganzrationale Funktionen • Nullstellen
Übung

1. Geben Sie alle Nullstellen folgender Funktionen mit Vielfachheit an.

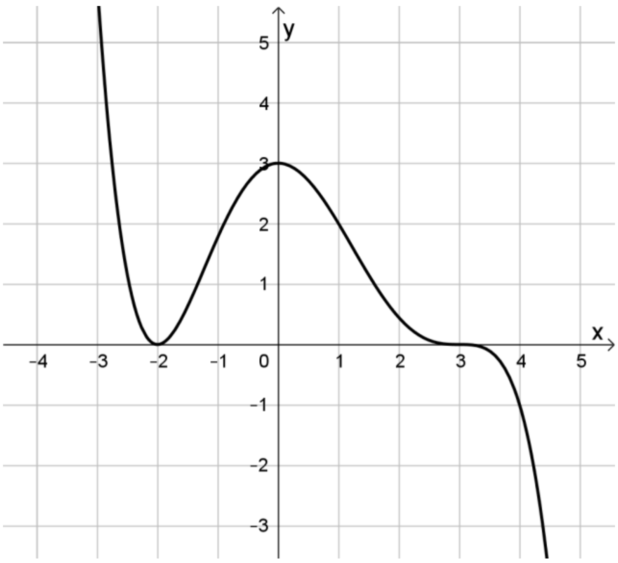
   a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3)$
   b) $f(x) = -\frac{1}{6}x^2(x-7)$
   c) $f(x) = (x-3)^2(x+2)^2$
   d) $f(x) = 2x^2 - 6x$
   e) $f(x) = -\frac{1}{9}(x^2+9)(x-9)^2$

2. Bei den Graphen handelt es sich um solche von ganzrationalen Funktionen. Ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm.

   a) Grad 3



   b) Grad 5



3. Bestimmen Sie alle Nullstellen der gegebenen Funktionen mit Hilfe einer geeigneten Rechnung.

   a) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 5x$
   b) $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$
   c) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^2 - \frac{4}{3}$
   d) $f(x) = \frac{1}{4}x^5 + x^4 + x^3$
   e) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 - 3x^4 - 16$
   f) $f(x) = x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105$

4. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

   a) Eine ganzrationale Funktion besitzt stets höchstens so viele Nullstellen, wie ihr Grad.

   b) Es existieren ganzrationale Funktionen dritten Grades ohne Nullstellen.

   c) Es existieren ganzrationale Funktionen vierten Grades ohne Nullstellen.

   d) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades kann auch nur genau zwei Nullstellen besitzen.

Ganzrationale Funktionen • Nullstellen
Lösung

1.
a) $x_1 = -2$ einfach, $x_2 = 1$ einfach, $x_3 = 3$ einfach
b) $x_1 = 0$ doppelt, $x_2 = 7$ einfach
c) $x_1 = 3$ doppelt, $x_2 = -2$ doppelt
d) $f(x) = 2x(x-3)$, also $x_1 = 0$ einfach, $x_2 = 3$ einfach
e) $f(x) = -\frac{1}{9}(x^2+9)(x-3)(x+3)$, es existieren nur die beiden einfachen Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$.

2.
a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2(x-4)$
b) $f(x) = -\frac{1}{36}(x+2)^2(x-3)^3$

3.
a) $x_1 = 0$ einfach, $x_2 = -5$ einfach, $x_3 = 5$ einfach
b) $x_1 = -2$ einfach, $x_2 = -1$ einfach, $x_3 = 4$ einfach
c) Substitution: $x_{1/2} = \pm 2$ jeweils einfach, keine weiteren Nullstellen
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^3(x+2)^2$, $x_1 = 0$ dreifach, $x_2 = -2$ doppelt
e) Z.B. durch Substitution erhält man $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+4)$ du keine weiteren Nullstellen als $x_1 = -2$ einfach, $x_2 = 2$ einfach
f) $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ durch zweimalige Polynomdivision, damit ist $x_1 = 1$ einfach, $x_2 = 3$ einfach, $x_3 = 5$ einfach und $x_4 = 7$ einfach.

4.
a) Wahr, die Aussage gilt sogar, wenn man die Vielfachheit der Nullstellen mitberücksichtigt.
b) Falsch, jede ganzrationale Funktion dritten Grades kann als Produkt eines linearen und eines quadratischen Ausdrucks geschrieben werden.
c) Wahr. So ist $f(x) = x^4 + 1$ eine solche Funktion.
d) Wahr. Die Nullstellen müssen ersten bzw. zweiten Grades sein, wie beispielsweise $f(x) = x^2 \cdot (x-1)$.